9. Páros gráfok

**Páros gráfok (Definíciók ekvivalenciája)**

* A G gráf páros gráf, ha G két színnel színezhető, azaz ha 𝜒(𝐺) ≤ 2.
* ekvivalens az előzővel: G csúcsai 2 diszjunkt halmazra ponthatók úgy, hogy minden él a halmazok között fut.
* Jele: G (A,B;E)
* Megfigyelés:
  1. Páros hosszú kör páros, mert felváltva ki lehet színezni a pontjait.
  2. Páratlan kör nem páros, mert mire körbeérünk, két azonos színű pont lesz egymás mellett.
  3. Ha egy gráf páros, akkor a részgráfja is páros.
  4. Páros gráf nem tartalmazhat páratlan kört.
* Következmény: Mivel a fában nincs kör (hát még ptn kör), minden fa páros gráf.
* Tétel: G véges gráf pontosan akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan kört
  + bizonyítás:

**Párosítások (párosban, és páratlanban):**

* a G=(V,E) gráf éleinek M részhalmaza független, más szóval M (részleges) párosítás, ha az M-beli élek végpontjai különbözőek.

**Teljes párosítás:**

* M teljes párosítás, ha G minden csúcsát fedi.

**Adott ponthalmazt fedő párosítás:**

* Van a G gráf csúcsainak egy részhalmaza, és van egy párosításunk és a ponthalmaz minden pontja a párosítás valamelyik élének végpontja, akkor azt mondjuk, hogy a párosítás fedi a ponthalmazt.

Definíció: a G=(V,E) gráf 𝑋 ⊆ V ponthalmaz szomszédjainak számát N(X) jelöli.

**Hall tétel:**

* a G=(A,B,E) véges, páros gráfnak pontosan akkor létezik A-t fedő párosítása, ha |𝑋| ≤ |𝑁(𝑋)| minden 𝑋 ⊆ 𝐴-ra.
* cáfolásra alkalmas, bizonyításkor az összes lehetséges kiválasztást meg kell vizsgálnunk
* bizonyítás

**Forbenius**:

* a G=(A,B,E) véges, páros gráfnak pontosan akkor létezik teljes párosítása, ha |A|=|B|, és |𝑋| ≤ |𝑁(𝑋)| minden 𝑋 ⊆ 𝐴-ra. (Két színosztályban ugyanannyi csúcs van, és igaz rá a Hall tétel)
* bizonyítás

**König**:

* (1) ha G=(A,B,E) véges, páros gráf akkor 𝜈(𝐺) = 𝜏(𝐺)
* (2) ha G véges, páros gráfnak nincs izolált pontja, akkor 𝛼(𝐺) = 𝜌(𝐺)
* bizonyítás

**Alternáló utas algoritmus maximális párosítás keresése:**

* kiindulunk az üres párosításból, és azt javítgatjuk. Ha már találtunk M párosítást, akkor tekintjük az ahhoz tartozó segédgráfot, azaz M éleit B-ből A-ba irányítjuk, G egyéb éleit fordítva. Ha ebben a segédgráfban létezik út egy fedetlen A-ból, eddig fedetlen B-be, akkor az ú.n. alternáló úton az eddigi párosítás éleket elhagyva, és az út párosításon kívüli éleit bevéve egy eggyel nagyobb méretű párosítást kapunk. Ha nincs ilyen út, akkor M maximális párosítás.

Lefogó és független pont illetve élhalmazok:

**Lefogó ponthalmaz:**

* adott G pontjainak U halmaza lefogó ponthalmaz, ha G minden élének van U-beli végpontja.
* Legkevesebb pontból álló lefogó ponthalmaz mérete: 𝜏(𝐺).

**Független ponthalmaz:**

* G gráf pontjainak U részhalmaza független ponthalmaz, ha U nem feszít élt.
* ha semelyik 2 csúcs közt nem fut él.
* A maximális független ponthalmaz elemszáma 𝛼(𝐺).

**Lefogó élhalmaz**:

* G gráf éleinek F részhalmaza lefogó élhalmaz, ha G minden pontjából indul F-beli él.
* Legkevesebb élből álló lefogó élhalmaz elemszáma 𝜌(𝐺)

**Független élhalmaz:**

* adott G gráf esetén 𝜈(𝐺) jelöli a maximális független élhalmaz méretét, azaz G maximális párosításának elemszámát

**Triviális egyenlőtlenségek**

* ha G véges gráf, akkor 𝜈(𝐺) ≤ 𝜏(𝐺).
  + bizonyítás: Legyen M G-nek egy maximális (ν(G) élből álló) párosítása. Ha U egy minimális méretű lefogó ponthalmaz, akkor lefogja M minden élet is, ám U minden pontja legfeljebb egy párosításélt fog le. Tehát τ (G) = |U| ≥ |M| = ν(G) .
* tetszőleges, véges G gráfra 𝛼(𝐺) ≤ 𝜌(𝐺).
  + bizonyítás: Már önmagában egy 𝛼(𝐺) méretű független ponthalmaz lefogásához legalább 𝛼(𝐺) él szükséges.

**Gallai két tétele**

* Legyen G n pontú gráf
* 1. ha G-ben nincs hurokél, akkor 𝜏(𝐺) + 𝛼(𝐺) = 𝑛
* 2. ha G-nek nincs izolált pontja: 𝜈(𝐺) + 𝜌(𝐺) = n
* bizonyítás